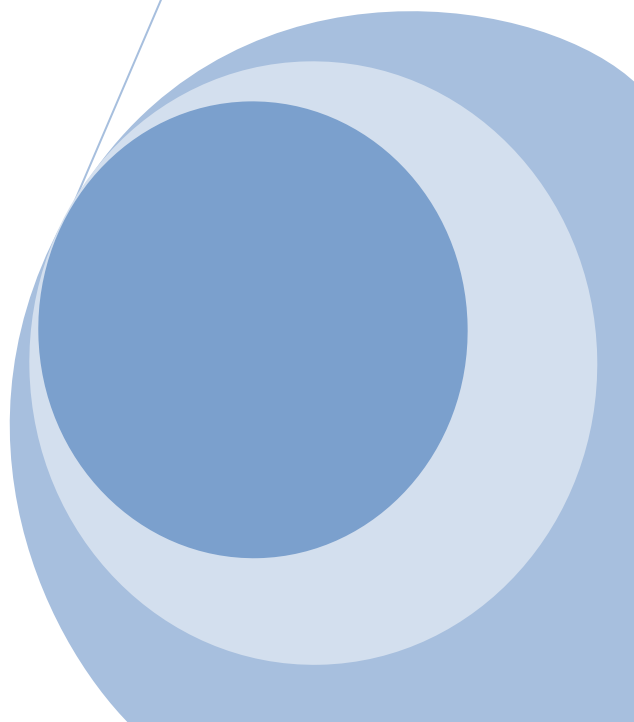
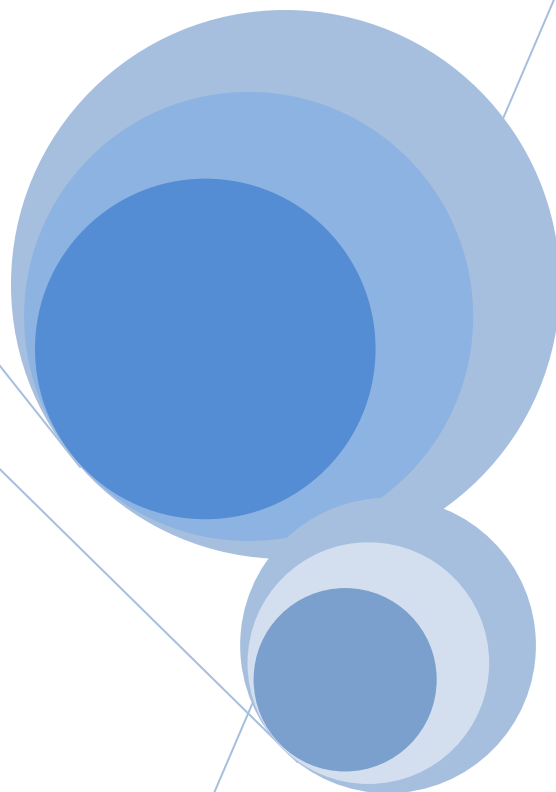


Κεφάλαιο 2 Παράγωγος

Θεώρημα Rolle
Θεώρημα Μέσης Τιμής
Συνέπειες Θ. Μέσης Τιμής
σταθερή συνάρτηση
μονοτονία
ακρότατα
Κυρτότητα-Σημεία καμπής
Ασύμπτωτες
Κανόνες De L Hospital
Μελέτη συνάρτησης
Γραφική παράσταση



2.12

Θεώρημα Rolle,
Θεώρημα Μέσης Τιμής

Θεώρημα Rolle

Θεώρημα

Αν η συνάρτηση f είναι

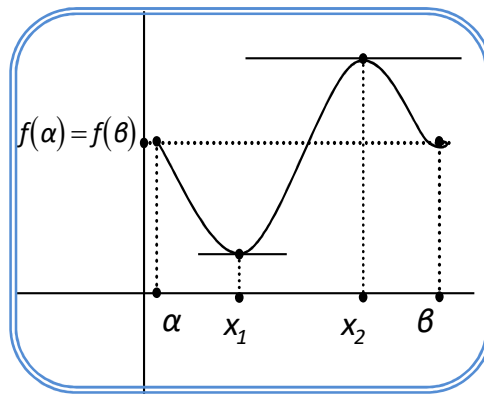
- συνεχής στο $[\alpha, \beta]$,
- παραγωγίσιμη στο (α, β)
- και $f(\alpha) = f(\beta)$, τότε

υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.

Στο διπλανό σχήμα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

Υπάρχουν δυο σημεία, τα x_1, x_2 για τα οποία ισχύει

$$f'(x_1) = 0, \quad f'(x_2) = 0.$$



Απόδειξη (εκτός ύλης)

- Αν η f είναι σταθερή, τότε $f'(x) = 0$, οπότε ισχύει το θεώρημα.
- Αν η f δεν είναι σταθερή, επειδή είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, η f έχει ελάχιστο, έστω το m και μέγιστο το M .

Υποθέτουμε ότι $M \neq f(\alpha) = f(\beta)$, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(x_0) = M$. Ισχύει,

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \text{για κάθε } x \in [\alpha, \beta].$$

Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , άρα

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Για $x < x_0$, επειδή $f(x) - f(x_0) \leq 0$ και $x - x_0 < 0$ είναι

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \text{ δηλαδή } f'(x_0) \geq 0 \quad (1).$$

Για $x > x_0$, επειδή $f(x) - f(x_0) \leq 0$ και $x - x_0 > 0$, είναι

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0, \text{ δηλαδή } f'(x_0) \leq 0 \quad (2).$$

Από (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι $f'(x_0) = 0$.

παράδειγμα

Να εξετάσετε αν ισχύει το θεώρημα *Rolle* για τη συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x + 2$ στο διάστημα $[0, 2]$.

Λύση

Η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$ ως πολυωνυμική, παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ με $f'(x) = 2x - 2$ και $f(0) = 2$, $f(2) = 2$, δηλαδή $f(0) = f(2)$, άρα ισχύει το θεώρημα *Rolle*. Υπάρχει, λοιπόν, ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 2)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 2x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

- Γεωμετρικά**, το θεώρημα *Rolle* μας λέει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ να είναι παράλληλη στον άξονα x' . Στο προηγούμενο σχήμα βλέπουμε ότι υπάρχουν δυο σημεία με τετμημένες x_1, x_2 στα οποία οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης είναι παράλληλες στον άξονα x' .
- Το θεώρημα *Rolle* αποδεικνύει την **ύπαρξη** μιας ρίζας της $f'(x)$ στο διάστημα (α, β) , αλλά δεν μας δίνει τρόπο για να βρούμε τη ρίζα αυτή.
- Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$, τότε είναι και συνεχής στο διάστημα αυτό, άρα για να εφαρμόζεται το θεώρημα *Rolle*, αρκεί να ισχύει $f(\alpha) = f(\beta)$.

4. Αν για μια συνάρτηση f υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$, δε σημαίνει ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f στο $[\alpha, \beta]$. Επίσης, αν δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f στο $[\alpha, \beta]$, δε σημαίνει ότι δεν υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.
5. Αν η f έχει ρίζες τις ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$ και αν είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$ και παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) , τότε η f' έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (ρ_1, ρ_2) .

Πράγματι, η f είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2]$, παραγωγίσιμη στο (ρ_1, ρ_2) και $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$, οπότε ισχύει το θεώρημα Rolle, δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.

2.13 Λυμένες ασκήσεις

Το θεώρημα Rolle εφαρμόζεται και σε ασκήσεις που ζητάνε να δείξουμε την ύπαρξη ριζών μιας συνάρτησης. Έχουμε τρεις κύριες κατηγορίες ασκήσεων.

1^η Κατηγορία

Ζητείται να δείξουμε ότι η συνάρτηση f (ή ότι η εξίσωση $f(x) = 0$) έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (α, β) .

α' τρόπος

Λύνουμε την εξίσωση $f(x) = 0$ με αλγεβρικούς τρόπους (σχήμα Horner, παραγοντοποίηση, χρήση διακρίνουσας κ.λπ.) ή βρίσκουμε προφανή λύση της f .

β' τρόπος

Εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano στην f στο $[\alpha, \beta]$.

γ' τρόπος

Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f για $x \in [\alpha, \beta]$, έστω $f([\alpha, \beta]) = [m, M]$. Αν $0 \in [m, M]$ και η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ τότε, σύμφωνα με το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$, δηλαδή η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[\alpha, \beta]$.

8^{ος} τρόπος

Θεωρούμε συνάρτηση F (αρχική της f) τέτοια, ώστε $F' = f$ και εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle για την F στο $[\alpha, \beta]$.

Ορισμός

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει

$$F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Αν η άσκηση ζητάει να δείξουμε ότι η f έχει τουλάχιστον δυο ρίζες, τότε εφαρμόζουμε τα προηγούμενα δυο φορές, σε δυο υποδιαστήματα του $[\alpha, \beta]$ που είναι ξένα μεταξύ τους

ή

«παραγοντοποιούμε» την f , έστω $f(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$ και αποδεικνύουμε ότι η $f_1(x)$ και η $f_2(x)$ έχουν από μια, τουλάχιστον, ρίζα τις $\rho_1 \in (\alpha, \beta)$ και $\rho_2 \in (\alpha, \beta)$ αντίστοιχα με $\rho_1 \neq \rho_2$.

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, $x \in \mathbb{R}$. Ισχύει $\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{3} + \frac{\gamma}{2} + \delta = 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο $(0, 1)$.

Λύση

Έστω η συνάρτηση

$$F(x) = \frac{\alpha}{4}x^4 + \frac{\beta}{3}x^3 + \frac{\gamma}{2}x^2 + \delta x.$$

- Η F είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ως πολυωνυμική, άρα και στο $[0, 1]$.
- Η F είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $(0, 1)$ με

$$F'(x) = f(x).$$

$f(1) = \alpha + \beta + \gamma + \delta, f(0) = \delta$.
Επειδή δεν ξέρουμε το πρόσημο του γινομένου $f(0) \cdot f(1)$ δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Bolzano. Επίσης δεν ξέρουμε αν το 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της f , οπότε δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα των ενδιάμεσων τιμών.

Θεώρημα Rolle

- $F(0)=0$, $F(1)=0$, άρα $F(0)=F(1)$.

Ισχύει το θεώρημα Rolle, δηλαδή υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $F'(x_0)=0$, οπότε $f(x_0)=0$, άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0,1)$.

2η κατηγορία

Ζητείται να δείξουμε ότι η συνάρτηση f (ή η εξίσωση $f(x)=0$) έχει το πολύ μια ρίζα στο (α,β) .

Μια το πολύ ρίζα σημαίνει ότι η f έχει μια ή καμία ρίζα. Θα πρέπει λοιπόν να δείξουμε ότι η f δεν έχει δυο ρίζες.

α' τρόπος

Δεχόμαστε ότι η f έχει δυο ρίζες τις $\rho_1, \rho_2 \in (\alpha, \beta)$ με $\rho_1 < \rho_2$, εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2] \subseteq [\alpha, \beta]$ και καταλήγουμε σε άτοπο.

Σχόλιο

Εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle στο διάστημα $[\rho_1, \rho_2]$ γιατί $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$.

β' τρόπος

Δείχνουμε ότι η f είναι 1-1 (συνήθως δείχνουμε ότι η f είναι γνησίως μονότονη), οπότε δεν μπορεί να έχει δυο ρίζες.

Υπενθύμιση

Κάθε 1-1 συνάρτηση δεν μπορεί να έχει δυο ρίζες. Πράγματι αν $x_1 \neq x_2$ δυο ρίζες της f τότε $f(x_1)=f(x_2)=0$, που είναι άτοπο αφού η f είναι 1-1 συνάρτηση.

ΠΡΟΣΟΧΗ

Αν η f είναι συνάρτηση 1-1, δε σημαίνει ότι έχει μια ρίζα. Αν η f είναι συνάρτηση 1-1, τότε έχει **μια το πολύ** ρίζα.

Άσκηση 2

Να δείξετε ότι η $f(x) = e^x + x + 5$ έχει το πολύ μια ρίζα.

Λύση

α' τρόπος

Έστω ότι η f έχει δυο ρίζες, τις ρ_1, ρ_2 με $\rho_1 < \rho_2$.

- Στο $[\rho_1, \rho_2]$ η f είναι συνεχής ως άθροισμα των συνεχών συναρτήσεων $e^x, x+5$.
- Στο (ρ_1, ρ_2) η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = e^x + 1$.
- Επίσης, $f(\rho_1) = f(\rho_2) = 0$.

Ισχύει το θεώρημα Rolle, δηλαδή υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\rho_1, \rho_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} + 1 = 0$.

Αυτό όμως είναι άτοπο, αφού $e^x + 1 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Σε άτοπο καταλήξαμε γιατί δεχθήκαμε ότι η f έχει δυο ρίζες, άρα η f έχει μια το πολύ ρίζα.

β' τρόπος

Η συνάρτηση e^x είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, η συνάρτηση $x+5$ είναι γνησίως αύξουσα, άρα και το άθροισμα των συναρτήσεων αυτών είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση, οπότε είναι συνάρτηση 1-1 στο $\mathbb{R}$. Έτσι, η f δεν μπορεί να έχει δυο ρίζες, άρα έχει μια το πολύ ρίζα στο $\mathbb{R}$.

ΠΡΟΣΟΧΗ

Η άσκηση ζητάει να δείξουμε ότι η f έχει το πολύ μια ρίζα, δηλαδή ζητάει να δείξουμε ότι η f δεν μπορεί να έχει περισσότερες από μια ρίζα. Δεν χρειάζεται να δείξουμε ότι η f έχει ρίζα, απλώς δείχνουμε ότι η f δεν έχει δυο ρίζες.

3^η κατηγορία

Ζητείται να δείξουμε ότι η συνάρτηση f (ή ότι η εξίσωση $f(x)=0$) έχει μια ακριβώς ρίζα (μόνο μια ρίζα) στο (α, β) .

1^ο βήμα

Δείχνουμε ότι η f έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) .

Χρησιμοποιούμε τους τρόπους που αναφέρθηκαν στην πρώτη κατηγορία.

2^ο βήμα

Δείχνουμε ότι η f δεν μπορεί να έχει δυο ρίζες στο (α, β) .

Χρησιμοποιούμε τους τρόπους που αναφέρθηκαν στη δεύτερη κατηγορία.

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 3x + \alpha$ με $-4 < \alpha < 0$. Να δείξετε ότι η f έχει μια ακριβώς ρίζα.

Λύση

Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ ως πολυωνυμική.

Για $x=0$ έχουμε:

$$f(0) = \alpha < 0$$

και για $x=1$ έχουμε:

$$f(1) = 4 + \alpha > 0.$$

Έτσι,

$f(0) \cdot f(1) < 0$, άρα ισχύει το θεώρημα Bolzano οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$.

Επίσης,

για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ ισχύει:

$$x_1^3 < x_2^3 \text{ και } 3x_1 + \alpha < 3x_2 + \alpha, \text{ άρα (προσθέτουμε κατά μέλη)}$$

$$x_1^3 + 3x_1 + \alpha < x_2^3 + 3x_2 + \alpha, \text{ δηλαδή } f(x_1) < f(x_2).$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $[0, 1]$, οπότε είναι συνάρτηση 1-1, άρα το x_0 είναι μοναδικό,

δηλαδή η f έχει μόνο μια ρίζα στο $(0, 1)$.

Πρέπει να δείξουμε ότι η ρίζα είναι μοναδική, άρα θα δείξουμε ότι η f είναι συνάρτηση 1-1. Θυμόμαστε ότι κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ είναι 1-1 συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$.

Άσκηση 4

Να δείξετε ότι η εξίσωση $e^x = -2x^2 + \alpha$ με $\alpha \in \mathbb{R}$ έχει το πολύ δυο ρίζες.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = e^x + 2x^2 - \alpha.$$

Έστω ότι η f έχει τρεις ρίζες τις

$$\rho_1 < \rho_2 < \rho_3.$$

- Στα $[\rho_1, \rho_2], [\rho_2, \rho_3]$ η f είναι

παραγωγίσιμη ως πολυ-ωνυμική, άρα και συνεχής, με $f'(x) = e^x + 4x$.

- $f(\rho_1) = f(\rho_2) = f(\rho_3) = 0$.

Στα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2], [\rho_2, \rho_3]$ ισχύει το θεώρημα Rolle, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (\rho_1, \rho_2)$ ώστε

$$f'(x_1) = 0 \text{ και τουλάχιστον ένα}$$

$$x_2 \in (\rho_2, \rho_3) \text{ ώστε } f'(x_2) = 0.$$

- Στο $[x_1, x_2]$ η f' είναι παραγωγίσιμη με $f''(x) = e^x + 4$, άρα είναι και συνεχής.

Επίσης, $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$, οπότε ισχύει το θεώρημα Rolle για την f' , δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f''(\xi) = 0 \Leftrightarrow e^\xi + 4 = 0,$$

που είναι άτοπο, αφού $e^x + 4 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Σε άτοπο καταλήξαμε γιατί δεχθήκαμε ότι η f έχει 3 ρίζες, άρα η f δεν μπορεί να έχει 3 ρίζες, επομένως έχει το πολύ δυο ρίζες.

Το πολύ δυο ρίζες σημαίνει ότι η f έχει δυο ρίζες ή μια ρίζα ή καμία ρίζα. Θα δείξουμε λοιπόν ότι η f δεν έχει 3 ρίζες.

Δεχόμαστε ότι έχει 3 ρίζες και θα καταλήξουμε σε άτοπο.

$f(\rho_1) = f(\rho_2) = f(\rho_3) = 0$,
εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle στα $[\rho_1, \rho_2], [\rho_2, \rho_3]$

Επειδή $f'(x_1) = f'(x_2)$
εφαρμόζουμε το θεώρημα Rolle για την f' στο $[x_1, x_2]$
και καταλήγουμε σε άτοπο.

Σχόλιο

Σε άτοπο μπορούμε να καταλήξουμε και ως εξής:

$f'(x) = e^x + 4x$. Έχουμε καταλήξει στο ότι υπάρχουν x_1, x_2 τέτοια, ώστε $f'(x_1) = 0$ και $f'(x_2) = 0$. Όμως η f' είναι γνησίως αύξουσα, ως άθροισμα αυξουσών συναρτήσεων, οπότε είναι 1-1 συνάρτηση, άρα δεν μπορεί να έχει δυο ρίζες.

Άσκηση 5

Να δείξετε ότι η $f(x) = e^x - 3x$ έχει δυο ακριβώς ρίζες.

Λύση

Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και

$$f(0) \cdot f(1) < 0, \text{ αφού}$$

$$f(0) = 1 > 0 \text{ και}$$

$$f(1) = e - 3 < 0.$$

Στο $[0,1]$ ισχύει το θεώρημα Bolzano δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = 0$.

Ομοίως,

στο $[1,2]$ η f είναι συνεχής.

Είναι $f(1) = e - 3 < 0$, $f(2) = e^2 - 6 > 0$, άρα $f(1) \cdot f(2) < 0$, οπότε ισχύει το θεώρημα Bolzano, δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2 \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_2) = 0$.

Θα δείξουμε ότι δεν μπορεί να έχει 3 ρίζες. Έστω ότι η f έχει 3 ρίζες τις x_1, x_2, x_3 με $x_1 < x_2 < x_3$.

Αποδεικνύουμε πρώτα ότι η f έχει δυο τουλάχιστον ρίζες χρησιμοποιώντας το θεώρημα Bolzano. Με διάφορες δοκιμές προσπαθούμε να βρούμε δυο αριθμούς x_1, x_2 ώστε $f(x_1)f(x_2) < 0$.

Δεχόμαστε ότι η f έχει τρεις ρίζες και καταλήγουμε σε άτοπο.

Στα $[x_1, x_2], [x_2, x_3]$ η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής με $f'(x) = e^x - 3$.

$f(x_1) = f(x_2) = 0$, άρα ισχύει το θεώρημα Rolle για την f στο $[x_1, x_2]$, δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1) = 0$.

Ομοίως, στο $[x_2, x_3]$ η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής και $f(x_2) = f(x_3)$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in (x_2, x_3)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_2) = 0$.

Στο $[\xi_1, \xi_2]$ η f' είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής με $f''(x) = e^x$ και $f'(\xi_1) = f'(\xi_2) = 0$, άρα ισχύει το θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση f' , δηλαδή

υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\xi_1, \xi_2)$ τέτοιο, ώστε $f''(x_0) = 0$, δηλαδή $e^{x_0} = 0$, που είναι άτοπο.

Σε άτοπο καταλήξαμε γιατί δεχθήκαμε ότι η $f(x)$ έχει 3 ρίζες, οπότε η f δεν έχει τρίτη ρίζα, επομένως έχει δυο ακριβώς ρίζες.

Σχόλιο

Μπορούμε να φτάσουμε σε άτοπο και διαφορετικά, δηλαδή έχουμε βρει ότι η f' έχει δυο ρίζες τις ξ_1, ξ_2 . Όμως η $f'(x) = e^x - 3$ έχει μια μόνο ρίζα.

Πράγματι, $e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$, οπότε το συμπέρασμα ότι η f' έχει δυο ρίζες, τις ξ_1, ξ_2 , είναι άτοπο.

Έτσι, η f δεν μπορεί να έχει τρεις ρίζες, οπότε έχει ακριβώς δυο.

Μεθοδολογία

Το θεώρημα *Rolle* εφαρμόζεται επίσης και σε ασκήσεις που ζητάνε να δείξουμε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$, ώστε να ισχύει κάποια σχέση, όπως για παράδειγμα $f'(\xi) = \lambda$, ή $f'(\xi) = g'(\xi)$. Στις περιπτώσεις αυτές χρησιμοποιούμε μια «βοηθητική» συνάρτηση τέτοια, ώστε με την παραγώγισή της να φτάσουμε στην ζητούμενη σχέση.

Ο παρακάτω πίνακας δίνει μερικές «βοηθητικές» συναρτήσεις.

Θέλουμε να δείξουμε ότι:	ΒΟΗΘΗΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ
$f'(\xi) = \lambda$	$\varphi(x) = f(x) - \lambda x$, αφού $\varphi'(x) = f'(x) - \lambda$
$f'(\xi) = g'(\xi)$	$\varphi(x) = f(x) - g(x)$, αφού $\varphi'(x) = f'(x) - g'(x)$

$f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi) = 0$	$\varphi(x) = f(x)g(x)$, αφού $\varphi'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
$f'(\xi)(\xi - \mu) + f(\xi) = 0$ ή $f'(\xi)(\xi - \mu) = -f(\xi)$	$\varphi(x) = f(x)(x - \mu)$, αφού $\varphi'(x) = f'(x)(x - \mu) + f(x)$
$f'(\xi)g(\xi) = f(\xi)g'(\xi)$ ή $f'(\xi)g(\xi) - f(\xi)g'(\xi) = 0$	$\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, αφού $\varphi'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$
$f'(\xi)(\xi - \mu) = f(\xi)$ ή $f'(\xi)(\xi - \mu) - f(\xi) = 0$	$\varphi(x) = \frac{f(x)}{(x - \mu)}$, αφού $\varphi'(x) = \frac{f'(x)(x - \mu) - f(x)}{(x - \mu)^2}$

Άσκηση 6

Έστω οι συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύει το θεώρημα Rolle στο $[\alpha, \beta]$.

- Ναδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$, ώστε οι εφαπτόμενες των C_f, C_g στα σημεία $A(\xi, f(\xi))$ και $B(\xi, g(\xi))$ αντίστοιχα να είναι παράλληλες.
- Αν ισχύει $f''(x) \neq g''(x)$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ ναδειχθεί ότι το ξ είναι μοναδικό.

Λύση

- Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = g'(\xi)$.

$$f'(\xi) = g'(\xi) \Leftrightarrow f'(\xi) - g'(\xi) = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - g(x)$.

Για τις συναρτήσεις f, g ισχύει το θεώρημα Rolle στο $[\alpha, \beta]$, οπότε οι f, g είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμες στο (α, β) και

$$f(\alpha) = f(\beta), \quad g(\alpha) = g(\beta).$$

Η συνάρτηση $h(x)=f(x)-g(x)$ είναι συνεχής στο $[α,β]$ ως διαφορά των συνεχών συναρτήσεων f, g και είναι παραγωγίσιμη στο $(α,β)$ με

$$h'(x)=f'(x)-g'(x).$$

Επίσης, $h(α)=h(β)$, οπότε ισχύει το θεώρημα Rolle για την

h στο $[α,β]$, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον

$ξ \in (α,β)$ τέτοιο, ώστε

$$h'(ξ)=0 \Leftrightarrow f'(ξ)-g'(ξ)=0,$$

άρα $f'(ξ)=g'(ξ)$.

Έτσι, οι εφαπτόμενες των C_f, C_g στα σημεία $A(ξ, f(ξ)), B(ξ, g(ξ))$ είναι παράλληλες, αφού έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης.

ii) Έστω ότι υπάρχει και $ρ \in (α,β)$ με $ρ \neq ξ$ τέτοιο, ώστε $f'(ρ)=g'(ρ)$, δηλαδή $h'(ρ)=0$.

Ας υποθέσουμε ότι $ξ < ρ$, οπότε στο $[ξ, ρ] \subseteq [α, β]$ η $h'(x)=f'(x)-g'(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων, στο $(ξ, ρ)$ η $h'(x)$ είναι παραγωγίσιμη με $h''(x)=f''(x)-g''(x)$ και $h'(ξ)=h'(ρ)=0$, οπότε ισχύει το θεώρημα Rolle για την h' , δηλαδή υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (ξ, ρ)$ τέτοιο, ώστε

$$h''(x_0)=0 \Leftrightarrow f''(x_0)-g''(x_0)=0, \text{ άρα}$$

$$f''(x_0)=g''(x_0),$$

που είναι άτοπο, αφού $f''(x) \neq g''(x)$ για κάθε $x \in (α, β)$.

Έτσι, το $ξ$ του πρώτου ερωτήματος είναι μοναδικό.

Λάθος λύση

Ισχύει το θεώρημα Rolle για την f στο $[α, β]$, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $ξ \in (α, β)$ τέτοιο, ώστε $f'(ξ)=0$.

Ομοίως, για τη g ισχύει το θεώρημα Rolle στο $[α, β]$ άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $ξ \in (α, β)$ τέτοιο, ώστε $g'(ξ)=0$ οπότε

$$f'(ξ)=g'(ξ)$$

Η λύση αυτή είναι λανθασμένη γιατί το $ξ$ του θεωρήματος Rolle για την f δεν είναι απαραίτητα το ίδιο $ξ$ του θεωρήματος Rolle για την g .